

ユニバーサル横メルカトル図法の座標変換式およびその導出

By Kacchan

1. はじめに

ユニバーサル横メルカトル図法(以後「UTM 図法」と略す)は、中縮尺向けの地図投影法であり、日本でも国土地理院発行の 1:10000~1:200000 の地形図に使用されている。本稿では、緯度・経度を XY 座標に換算する式と、縮尺係数に 0.9996 が用いられる理由、更に換算式の導出過程について記す。

2. 緯度・経度を XY 座標に換算する式

UTM 図法では、緯度 L_a 、経度 L_o 、高度 H を世界座標での位置 ${}^t(X \ Y \ Z)$ に換算する式は下記ようになる。なお、図 2.1 に座標系の概念図を示す。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} k_o \left\{ a L_{o_basis} + N(L_a) \left(\cos L_a (L_o - L_{o_basis}) + \frac{1}{6} (\cos L_a)^3 (1 - (\tan L_a)^2 + e'^2 (\cos L_a)^2) (L_o - L_{o_basis})^3 \right) \right\} \\ k_o \left\{ S(L_a) + N(L_a) \left(\frac{1}{4} \sin(2L_a) (L_o - L_{o_basis})^2 + \frac{1}{24} (\sin L_a (\cos L_a)^3) (5 - (\tan L_a)^2 + 9e'^2 (\cos L_a)^2 + 4e'^4 (\cos L_a)^4) (L_o - L_{o_basis})^4 \right) \right\} \\ H \end{pmatrix}$$

各数値の定義は下記：

L_a ：緯度(単位 radian)

L_o ：経度(単位 radian)

H ：高度(単位 m)

θ ：換算に用いる経度帯の幅(単位 degree)、UTM 図法では $\theta = 6[^\circ]$ とする

$L_{o_basis} = \left(\theta \times \left[\frac{1}{\theta} \left(\frac{180}{\pi} L_o \right) \right] + \frac{\theta}{2} \right) \times \frac{\pi}{180}$ ：換算の際に基準とする子午線の経度(単位 radian)、ここで $[]$ はガウス記号とする

a ：地球の長半径(単位 m)、すなわち地球中心から赤道までの距離(数値例は表 2.1 参照)

b ：地球の短半径(単位 m)、すなわち地球中心から北極点 or 南極点までの距離(数値例は表 2.1 参照)

$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ：第 1 離心率

$e' = \frac{e}{1 - e^2}$ ：第 2 離心率

k_o ：投影原点の縮尺係数(UTM 図法では $k_o = 0.9996$ とする、理由については後述)

$R(L_a) = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 L_a)^{3/2}}$ ：子午線曲率半径(単位 m)

$N(L_a) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 L_a}}$ ：卯酉線曲率半径(単位 m)

$S(L_a) = a \left(\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} \right) L_a - \left(\frac{3e^2}{8} + \frac{3e^4}{32} + \frac{45e^6}{1024} \right) \sin(2L_a) + \left(\frac{15e^4}{256} + \frac{45e^6}{1024} \right) \sin(4L_a) - \frac{35e^6}{3072} \sin(6L_a) \right)$ ：子午線弧長(単位 m)(近似過程は参考文献[2]参照)

表 2.1 準椭楕円体ごとの長半径・短半径の例(参考文献[1]も参照のこと)

	WGS84 楕円体	GRS80	ベッセル
a [m]	6378137.00000000	6378137.00000000	6377397.15500000
b [m]	6356752.31424518	6356752.31414035	6356078.96300000

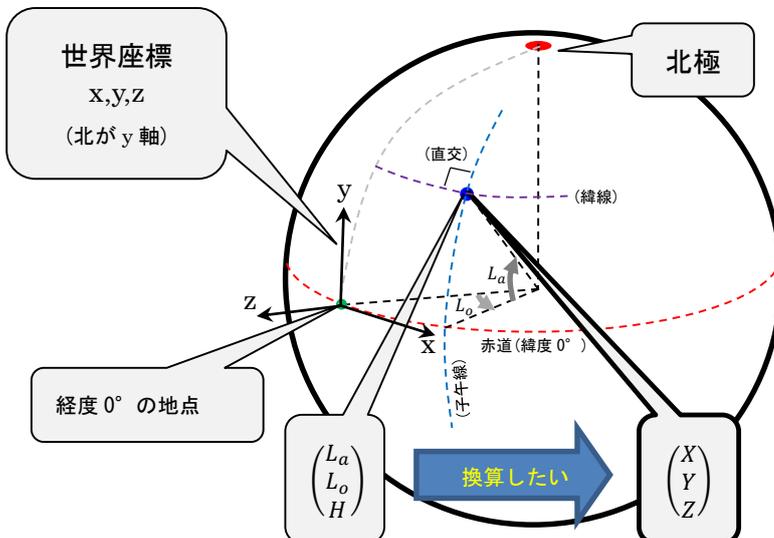


図 2.1 世界座標 x,y,z の概念図

3. 縮尺係数が0.9996であること理由

UTM 図法とは、円筒図法（地球にはめ込んだ円柱 or 楕円柱の表面に、地球表面の各地点をプロットする）の一種である。

図 3.1 のように、まず地球を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ なる楕円体とみなし、そこへ $\frac{x^2}{(k_o a)^2} + \frac{z^2}{(k_o b)^2} = 1$ (k_o は投影原点の縮尺係数) なる楕円柱をはめ込むことを考える。すると楕円体上のある地点は、楕円体の中心からその地点を通って無限に伸びる直線と、楕円柱表面とが交わる点に、投影されることになる。投影誤差を少なくするべく、UTM 図法では1回の投影でカバーする範囲を、楕円体表面を縦方向に60等分したうちの1つとする。(なお、図 3.1 では説明簡略化のため経度 $-3^\circ \sim +3^\circ$ の縦に長い領域のみ描いているが、実際には、経度 $0^\circ \sim 6^\circ$ 、経度 $6^\circ \sim 12^\circ$ 、…、経度 $354^\circ \sim 360^\circ$ 、以上60個すべての縦長領域について投影を行う。)

図 3.1(a)のように $k_o = 1$ とすると、経度 0° および 180°]の子午線上においてのみ、楕円体と楕円柱がちょうど接し、縮尺は1倍となる。しかしながら、それ以外のすべての地点では楕円柱のほうが楕円体よりも外側となり、従って縮尺は1を超える値となる。投影する領域全体の縮尺がおおよそ1であることを理想とする場合、この状態は好ましくない。

そこで図 3.1(b)のように、投影原点の縮尺係数をわずかに小さくする($k_o = 0.9996$)。これは、投影対象である楕円柱をわずかに小さくすることと等価である。これにより、楕円体より楕円柱が外側の領域と内側の領域、両方が混在するようになり、投影する領域全体の縮尺がおおよそ1となる。

なお、経度 L_o かつ緯度 L_a の地点 (単位ベクトルは $(\cos L_a \cos L_o, \cos L_a \sin L_o, \sin L_a)$ で表せる) における縮尺を $M(L_o, L_a)$ とおくと、 $M(L_o, L_a) = \frac{\text{(楕円体中心から楕円柱表面までのノルム)}}{\text{(楕円体中心から楕円柱表面までのノルム)}} = \frac{p'}{p}$ 、ここで p は $\frac{(p \cos L_a \cos L_o)^2}{a^2} + \frac{(p \cos L_a \sin L_o)^2}{a^2} + \frac{(p \sin L_a)^2}{b^2} = 1$ を、 p' は $\frac{(p' \cos L_a \cos L_o)^2}{(k_o a)^2} + \frac{(p' \sin L_a)^2}{(k_o b)^2} = 1$ を満たすことから

$$M(L_o, L_a) = \frac{p'}{p} = k_o \frac{\sqrt{b^2(\cos L_a)^2 + a^2(\sin L_a)^2}}{\sqrt{b^2(\cos L_a \cos L_o)^2 + a^2(\sin L_a)^2}}$$

と表せる。図 3.2 に、横軸を L_a とし縦軸を $M(L_o, L_a)$ としたグラフを示す。図 3.2(a) は $k_o = 1$ 、図 3.2(b) は $k_o = 0.9996$ のグラフであり、後者では経度 $-3^\circ \sim +3^\circ$]での縮尺平均がより 1.0000 倍に近づいていることがわかる。

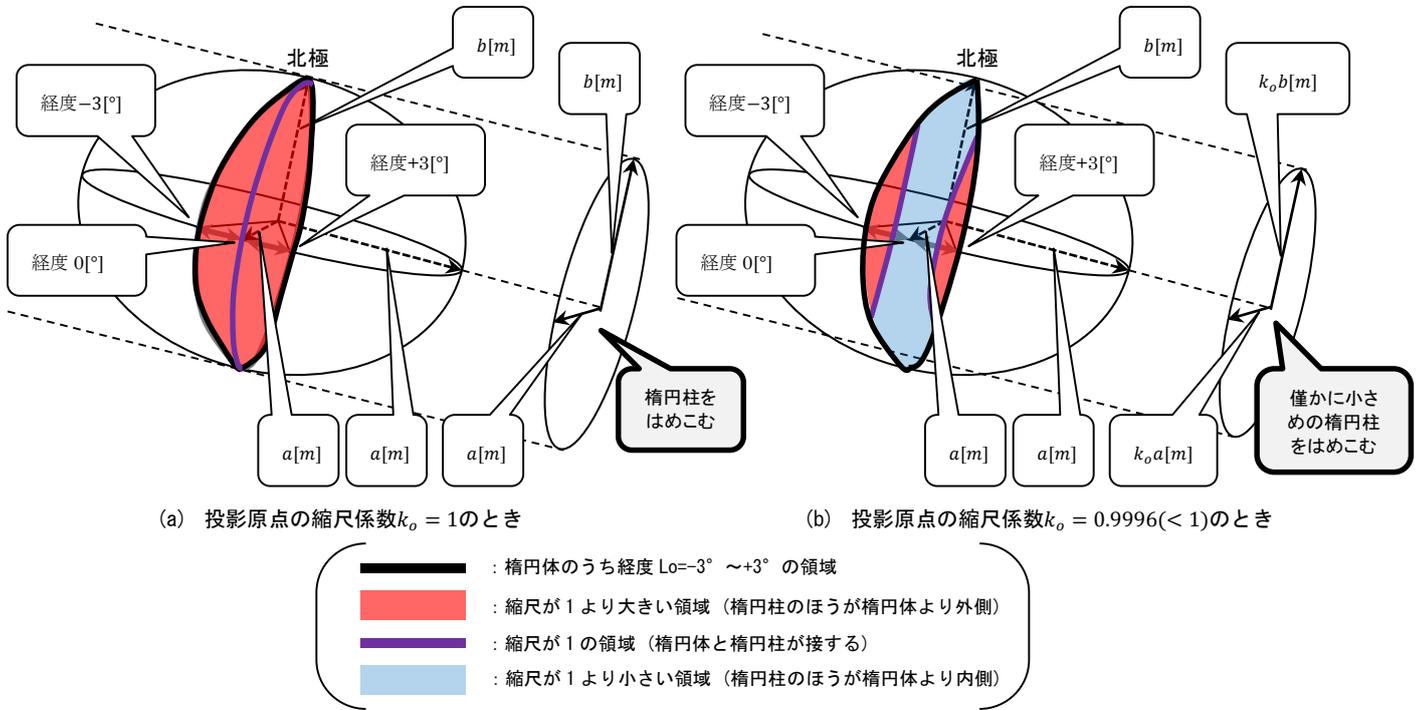
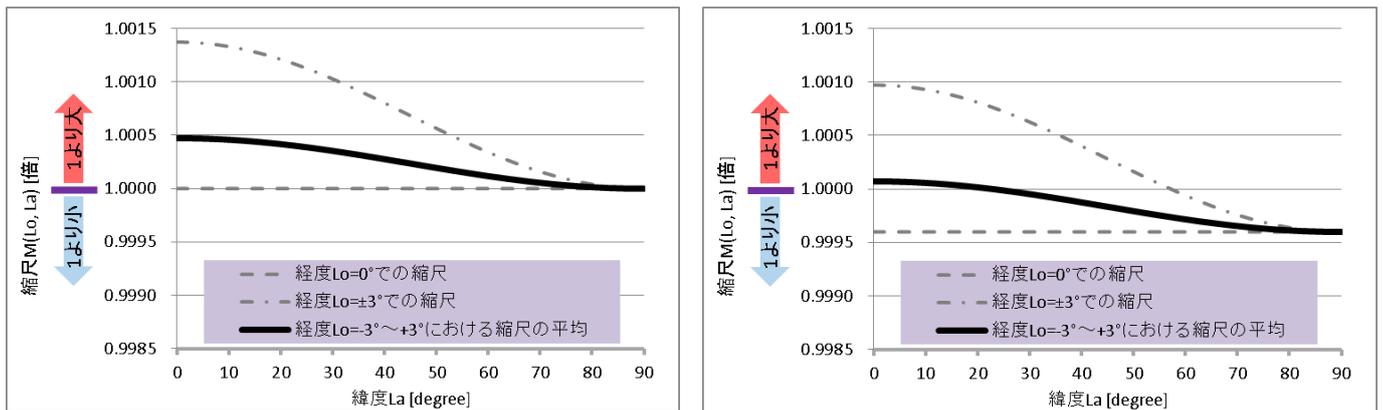


図 3.1 UTM 図法の概念図



(a) 投影原点の縮尺係数 $k_o = 1$ のとき

(b) 投影原点の縮尺係数 $k_o = 0.9996 < 1$ のとき

図 3.2 楕円体から楕円柱へ投影する際の縮尺

4. 換算式の導出

換算式導出過程を、以下に記す。(参考文献[3]も参照のこと)

まず、赤道からターゲット(経度 L_o 、緯度 L_a の地点)まで子午線方向に伸びる曲線の長さ(子午線弧長)は、 $\int_{L'_a=0}^{L'_a=L_a} R(L'_a) dL'_a$ で計算できる。この値から X 方向と Y 方向の 2 つの座標を一度に求めるには、直交座標系を複素数平面として仮定し、X を実数部、Y を虚数部として計算を行えばよい。しかしながら L_o と L_a は曲面上的の値であり、直交座標系ではない。そこで、 L_o と直交する値として z を導入し、 L_a の代わりとする。

図 4.1 に、 z の概念図を示す。 z の次元は [radian] であり、常に L_o と直交する。値については、図 4.1 より、経度が $\Delta L'_o$ だけ動くと値が $\frac{R(L'_a) \cdot \Delta L'_a}{N(L'_a) \cos L'_a} \cdot \Delta L'_o$ だけ上乗せされるため、積分の式に置き換えて下記のように表せる。

$$z = \sum \frac{R(L'_a) \cdot \Delta L'_a}{N(L'_a) \cos L'_a} \cdot \Delta L'_o = \sum \frac{R(L'_a) \Delta L'_a}{N(L'_a) \cos L'_a} = \int_{L'_a=0}^{L'_a=L_a} \frac{R(L'_a)}{N(L'_a) \cos L'_a} dL'_a$$

$z = u + vi$ (実数部 u が X 方向、虚数部 v が Y 方向) と定義すると、下記のように $\int_{L'_a=0}^{L'_a=L_a} R(L'_a) dL'_a$ を複素数 z の関数として表したうえで、その実数部と虚数部を計算すればよいことになる。

$$\int_{L'_a=0}^{L'_a=L_a} R(L'_a) dL'_a = Q(z) = Q(u + vi)$$

両辺を L_a で偏微分すると、 $\frac{\partial z}{\partial L_a} = \frac{R(L_a)}{N(L_a) \cos L_a}$ すなわち $N(L_a) \cos L_a dz = R(L_a) dL_a$ である。これを利用すると、

$$\int_{L'_a=0}^{L'_a=L_a} R(L'_a) dL'_a = \int_{z'=0}^{z'=z} N(L'_a) \cos L'_a dz' = Q(z) = Q(u + vi)$$

が得られる。こうして、赤道からターゲットまでの子午線方向に伸びる曲線の長さ Q 、複素数 z の関数として表現可能となった。

$z = vi$ のまわりで $Q(z)$ を Taylor 展開すると、下記を得る。

$$\int_{L'_a=0}^{L'_a=L_a} R(L'_a) dL'_a = \int_{z'=0}^{z'=z} N(L'_a) \cos L'_a dz' = Q(u + vi) = Q(vi) + \frac{u}{1!} \frac{\partial Q(vi)}{\partial z} + \frac{u^2}{2!} \frac{\partial^2 Q(vi)}{\partial z^2} + \frac{u^3}{3!} \frac{\partial^3 Q(vi)}{\partial z^3} + \frac{u^4}{4!} \frac{\partial^4 Q(vi)}{\partial z^4} + \frac{u^5}{5!} \frac{\partial^5 Q(vi)}{\partial z^5} + \dots$$

更に、虚数に関数内から出すと、下記ようになる。

$$Q(u + vi) = iQ(v) + i \cdot \left(\frac{1}{i}\right) \frac{u}{1!} \frac{\partial Q(v)}{\partial z} + i \cdot \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{u^2}{2!} \frac{\partial^2 Q(v)}{\partial z^2} + i \cdot \left(\frac{1}{i}\right)^3 \frac{u^3}{3!} \frac{\partial^3 Q(v)}{\partial z^3} + i \cdot \left(\frac{1}{i}\right)^4 \frac{u^4}{4!} \frac{\partial^4 Q(v)}{\partial z^4} + i \cdot \left(\frac{1}{i}\right)^5 \frac{u^5}{5!} \frac{\partial^5 Q(v)}{\partial z^5} + \dots$$

実数部と虚数部とを分離したうえで投影原点の縮尺係数 k_o を積算し、 $u = L_o - L_{o_basis}$ とすると、 $\frac{\partial Q(z)}{\partial z} = N(L_a) \cos L_a$ を利用して下記を得る。(Taylor 展開の中心を L_{o_basis} としたため、オフセットとして X に $k_o a L_{o_basis}$ を足している)
近似的具体的な方法については参考文献[2]および[3]を参照のこと。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k_o a L_{o_basis} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_o \cdot \text{Re}(Q) \\ k_o \cdot \text{Im}(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_o a L_{o_basis} \\ 0 \end{pmatrix} + k_o \begin{pmatrix} \frac{u}{1!} \frac{\partial Q(v)}{\partial z} - \frac{u^3}{3!} \frac{\partial^3 Q(v)}{\partial z^3} + \frac{u^5}{5!} \frac{\partial^5 Q(v)}{\partial z^5} + \dots \\ Q(v) - \frac{u^2}{2!} \frac{\partial^2 Q(v)}{\partial z^2} + \frac{u^4}{4!} \frac{\partial^4 Q(v)}{\partial z^4} + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_o a L_{o_basis} \\ 0 \end{pmatrix} + k_o \begin{pmatrix} N(L_a) \cos L_a (L_o - L_{o_basis}) - \frac{(L_o - L_{o_basis})^3}{3!} \frac{\partial^3 Q(v)}{\partial z^3} + \frac{(L_o - L_{o_basis})^5}{5!} \frac{\partial^5 Q(v)}{\partial z^5} + \dots \\ \int_{L'_a=0}^{L'_a=L_a} R(L'_a) dL'_a - \frac{(L_o - L_{o_basis})^2}{2!} \frac{\partial^2 Q(v)}{\partial z^2} + \frac{(L_o - L_{o_basis})^4}{4!} \frac{\partial^4 Q(v)}{\partial z^4} + \dots \end{pmatrix} \\ &\cong k_o \begin{pmatrix} a L_{o_basis} + N(L_a) \left(\cos L_a (L_o - L_{o_basis}) + \frac{1}{6} (\cos L_a)^3 (1 - (\tan L_a)^2 + e'^2 (\cos L_a)^2) (L_o - L_{o_basis})^3 \right) \\ S(L_a) + N(L_a) \left(\frac{1}{4} \sin(2L_a) (L_o - L_{o_basis})^2 + \frac{1}{24} (\sin L_a (\cos L_a)^3) (5 - (\tan L_a)^2 + 9e'^2 (\cos L_a)^2 + 4e'^4 (\cos L_a)^4) (L_o - L_{o_basis})^4 \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なお、子午線弧長は下記のように近似した。(参考文献[2]参照)

$$\int_{L'_a=0}^{L'_a=L_a} R(L'_a) dL'_a \cong a \left(\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} \right) L_a - \left(\frac{3e^2}{8} + \frac{3e^4}{32} + \frac{45e^6}{1024} \right) \sin(2L_a) + \left(\frac{15e^4}{256} + \frac{45e^6}{1024} \right) \sin(4L_a) - \frac{35e^6}{3072} \sin(6L_a) \right) = S(L_a)$$

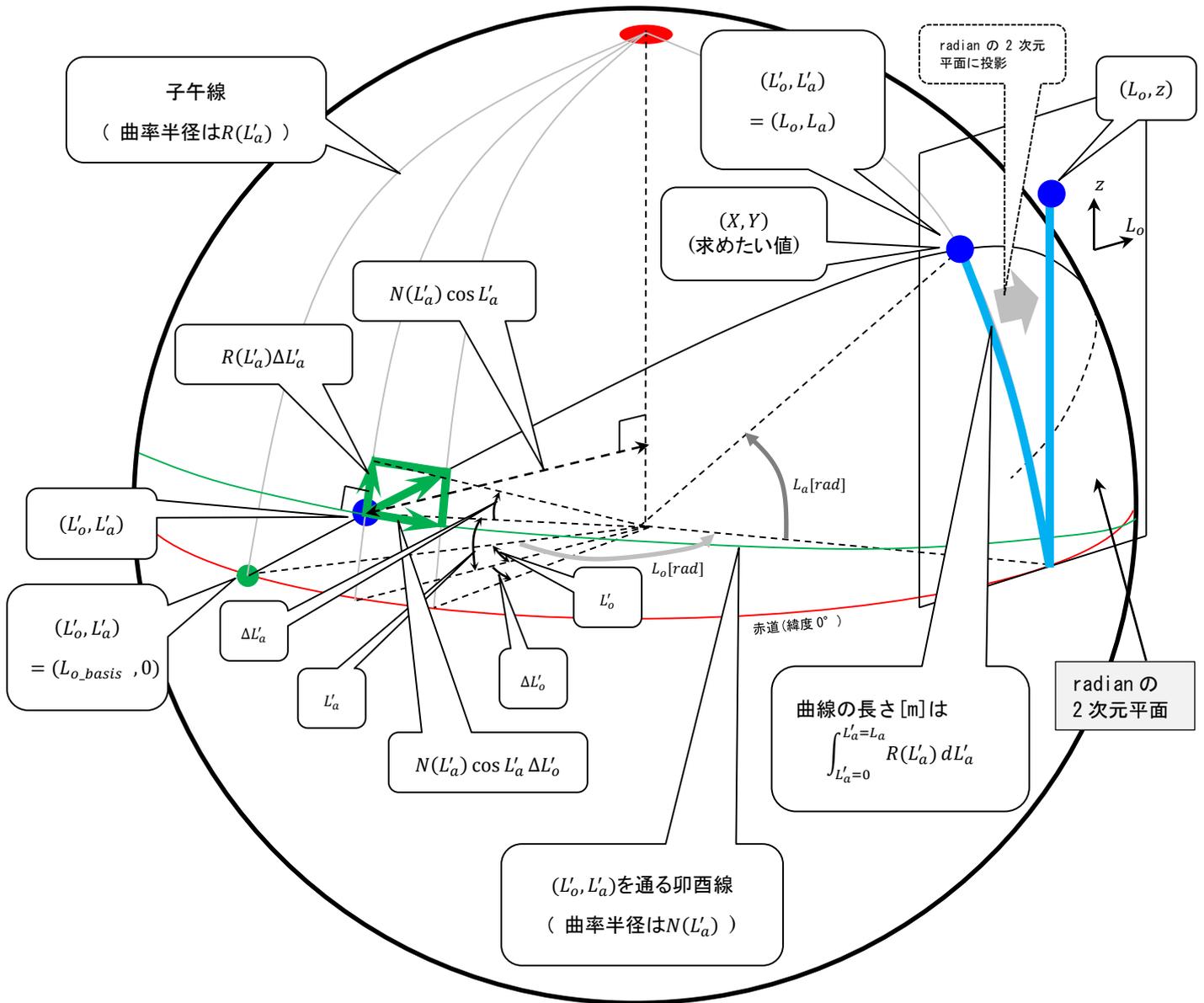


図 4.1 L_o と直交する z の導入

5. 参考文献

- [1] <http://www.uwgb.edu/dutchs/usefuldata/utmformulas.htm>
- [2] <http://w01.tp1.jp/~a540015671/program/utm.pdf>
- [3] Paul D. Thomas, "Conformal Projections in Geodesy and Cartography", U. S. Department of Commerce, Special Publication No. 251, 1952